www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET
DES MINES DE DOUAI

CONCOURS D'ADMISSION 1990

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

L'épreuve se compose d'un exercice et d'un problème indépendants.

EXERCICE

Dans cet exercice, ℓ désigne un nombre réel strictement positif et J l'ensemble des triangles isocèles du plan affine euclidien dont les deux côtés égaux ont pour longueur ℓ.

1/ A tout nombre réel θ de l'intervalle $]0, \pi[$, on fait correspondre l'aire $f(\theta)$ d'un élément de J dont l'angle déterminé par les deux côtés égaux admet pour mesure θ.

On appelle moyenne des aires de J selon l'angle au sommet le nombre :

$$M = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta)\, d\theta .$$

où f est prolongée par continuité en 0 et en π.

a) Expliciter la fonction f.

b) Calculer M.

2/ A tout nombre réel u de l'intervalle $]0, 2\ell[$, on fait correspondre l'aire $g(u)$ d'un élément de J dont le troisième côté a pour longueur u.

On appelle moyenne des aires de J selon le troisième côté le nombre :

$$N = \frac{1}{2\ell} \int_0^{2\ell} g(u)\, du .$$

où g est prolongée par continuité en 0 et en 2ℓ.

a) Expliciter la fonction g.

b) Calculer N.

.../...

PROBLEME

Les parties A , B , C *et* D *sont largement indépendantes.*

Notations : . I désigne l'intervalle $[-1, +1]$ de $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels.

. $\mathbb{R}_3[X]$ désigne l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3, à coefficients réels.

. Pour toute fonction f continue sur I, à valeurs réelles, on pose $\|f\| = \sup_{t \in I} \{ |f(t)| \}$.

A. 1/ Soit F l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $F(x,y) = (x+y , x\,y)$.

a) F est-elle injective ?

b) F est-elle surjective ?

2/ On considère la partie Δ de $\mathbb{R}^2$ définie par : $\Delta = \{ (x,y) \ ; \ x \in I , \ y \in I , \ x \leq y \}$.

Soit G la restriction de F à Δ ; on appelle Ω l'image de Δ par G.

a) Montrer que G est une bijection de Δ sur Ω et déterminer G^{-1}.

b) Représenter géométriquement Ω.

3/ On considère l'application H définie sur Ω par :

$$\forall (s,p) \in \Omega , \quad H(s,p) = \sup \left\{ 1 - s + p , \ 1 + s + p , \ \frac{1}{4} (s^2 - 4p) \right\},$$

et on se propose de déterminer le minimum de cette fonction sur Ω.

a) Pour tout α de l'intervalle $[-2, +2]$, on considère le segment $S_\alpha = \{ (s,p) \in \Omega \ ; \ s = \alpha \}$.

Déterminer le minimum de H sur S_α.

b) Déterminer le minimum de H sur Ω et préciser le point M de Ω où H est atteint.

Calculer $G^{-1}(M)$.

4/ a) Soit (a,b) un élément de Δ et soit $K(a,b) = \sup_{t \in I} \{ |(t-a)(t-b)| \}$.

Exprimer $K(a,b)$ à l'aide de la fonction H.

b) Comment doit-on choisir (a,b) pour que $K(a,b)$ soit minimum ?

B. On fixe deux nombres τ_1 et τ_2 de I vérifiant : $-1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq +1$,

et on considère l'application linéaire L définie par :

$$L : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$P \longmapsto (P(\tau_1) , P'(\tau_1) , P(\tau_2) , P'(\tau_2)).$$

1/ Déterminer le noyau de L.

2/ Montrer que pour tout élément $(\lambda_1 , \mu_1 , \lambda_2 , \mu_2)$ de $\mathbb{R}^4$, il existe un unique élément P de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que : $L(P) = (\lambda_1 , \mu_1 , \lambda_2 , \mu_2)$.

3/ Soient f une fonction de classe C^4 sur I et A l'unique élément de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que : $L(A) = (f(\tau_1) , f'(\tau_1) , f(\tau_2) , f'(\tau_2))$.

Soit x un élément de I, et soit g la fonction définie sur I par :

$$\forall t \in I , \quad g(t) = (t-\tau_1)^2 (t-\tau_2)^2 (f(x) - A(x)) - (x-\tau_1)^2 (x-\tau_2)^2 (f(t) - A(t)).$$

.../...

a) Montrer que g' admet au moins 4 zéros distincts.

b) En déduire qu'il existe z appartenant à $]-1, +1[$ tel que :

$$f(x) - A(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(z)(x-\tau_1)^2(x-\tau_2)^2 .$$

4/ En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le couple (τ_1, τ_2) de Δ pour que l'on ait :

$$\|f - A\| \leq \frac{1}{96} \|f^{(4)}\| .$$

C. Soit f la fonction réelle telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in I \setminus \{0\},\ f(x) = x \displaystyle\int_1^{2x^2} \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{t}}{4t}\, dt . \end{cases}$$

1/ Vérifier que ces formules définissent bien une application de I dans $\mathbb{R}$. Etudier la parité de f.

2/ a) Pour x appartenant à l'intervalle $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, on pose $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Montrer que h est croissante, négative et minorée sur $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 (on ne cherchera pas à calculer $f'(0)$).

3/ Exprimer $f'(x)$ pour tout x strictement positif de I et montrer que f est de classe C^1 sur I.

4/ Calculer $f''(x)$ pour tout x strictement positif de I. La fonction f est-elle de classe C^2 sur I ?

5/ Dresser le tableau des variations de f et donner l'allure de sa représentation graphique (on ne demande pas de préciser numériquement les éventuels extremums).

D. La fonction f est celle définie dans la partie C.

On définit sur I la fonction k par : $\forall x \in I,\ k(x) = f(x) - \frac{x|x|}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{9}|x|x^3$.

1/ Montrer que k est de classe C^2 sur I.

2/ Montrer qu'il existe un unique élément B de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$B(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = k(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \quad B(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = k(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \quad B'(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = k'(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \quad B'(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = k'(-\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

Expliciter le polynôme B.

3/ On admet pour la suite que :

. k est de classe C^3 sur I.

. $\forall x \in]0, 1[,\ f^{(4)}(x) = \Phi(x) + \Psi(x)$ avec

$$\begin{cases} \Phi(x) = \dfrac{1}{x^3}\left[\operatorname{Arctan}\sqrt{2}x - \sqrt{2}x\right] \\ \Psi(x) = \dfrac{2\sqrt{2}}{(1+2x^2)^3}\left[-1 + 8x^2 + 4x^4\right] \end{cases}$$

a) Montrer que k est de classe C^4 sur I.

b) Etablir la double inégalité : $\forall u \geq 0,\ 0 \leq \operatorname{Arctan} u - u + \frac{u^3}{3} \leq \frac{u^5}{5}$.

c) Prouver les inégalités suivantes : • $\forall x \in]0, 1],\ 0 \leq \Phi(x) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \leq \frac{4\sqrt{2}}{5}$

• $\forall x \in [0, 1],\ 0 \leq \Psi(x) + 2\sqrt{2} \leq 4\sqrt{2}$

4/ Montrer que : $\|k - B\| \leq \frac{\sqrt{2}}{20}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail